3-10-17

* $f: A \to B \to$ πεδίο τιμών
  $f(A) \to$ σύνολο τιμών

$f: A \to B \qquad g: C \to D$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ορίζεται αν $g(x) \in A, \forall x \in C$

ή $g(C) \subseteq A$

π.χ. $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

$g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$

$g((0, +\infty)) = (0, +\infty) \subseteq [0, +\infty) \Rightarrow$ η σύνθεση ορίζεται

και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1/\sqrt{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$

<u>Περιορισμός - Επέκταση</u>

$f: A \to B$, έστω $A \neq \emptyset$

$f|A_1 : A_1 \to B$, $(f|A_1)(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

Αν $g: A_1 \to B$ είναι <u>περιορισμός της f στο A_1</u> τότε

η f λέγεται επέκταση της g

<u>Πρόταση</u> Αν $f: A \to B$ είναι 1-1 κ' επί, τότε

$\exists!$ $g: B \to A$, τέτοια ώστε

υπάρχει μοναδική

① $f(g(y)) = y$, $\forall y \in B$ και

② $g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$

* - Η g ονομάζεται αντίστροφη της f και συμβολίζεται f^{-1}. Επιπλέον η f^{-1} είναι 1-1 και επί και $(f^{-1})^{-1} = f$

$\Rightarrow$ Επειδή f 1-1 κ' επί

Έστω $y \in B$, τότε $\exists!\, x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_y)=y$

Ορίζω $g: B \to A$ με $g(y)=x_y$, $\forall y \in B$

Η g είναι συνάρτηση γιατί $\forall y \in B\ \exists!\, x_y$

Η g είναι 1-1 γιατί αν $y_1, y_2 \in B$ τότε $x_{y_1} \neq x_{y_2}$

Η g είναι επί γιατί $g(f(x)) \overset{y=f(x)}{=} g(y)=x_y=x$

$f(g(y)) = f(x_y) = y$

Επίσης $g^{-1}=f$ λόγω ① κ' ②

Π.χ. [1] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^5+1$.

$f(\mathbb{R})=\mathbb{R} \Rightarrow f$ επί

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε

$x_1^5+1 = x_2^5+1$

$x_1^5 = x_2^5$ | 5 είναι περιττή δύναμη

$\boxed{x_1 = x_2}$

$\hookrightarrow$ f είναι 1-1

και αντιστρέψιμη.

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$, $y \in \mathbb{R}$

$x^5+1=y$

$x^5=y-1$

$x=(y-1)^{1/5}$

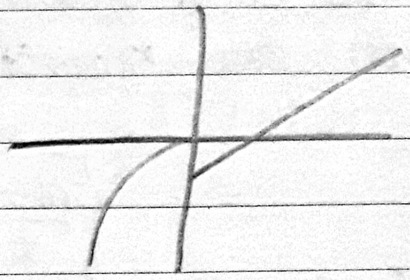
Άρα $f^{-1}(y)=(y-1)^{1/5}$

a^x ορίζεται μόνο όταν $a \geq 0$ για $x>0$ κ'
$a>0$ για $x \leq 0$ <u>Εκτός</u> από την περίπτωση
$a^{\frac{m}{n}}$ όπου n περιττός (τότε ορίζεται $\forall a \neq 0$)

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$$

- Η γραφική παράσταση δεν αποτελεί απόδειξη



Δεν ισχύει

Για $x\le 0$ f είναι 1-1.

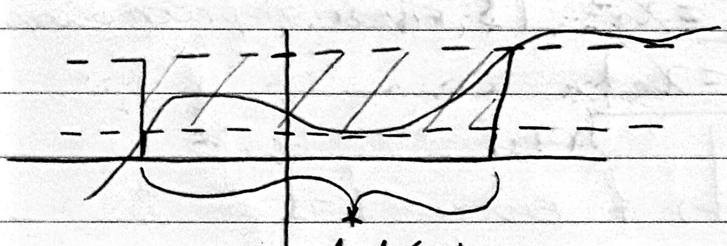
Για $x>0$ f είναι 1-1.

~~Άρα η f είναι 1-1~~

$f:A\to B$ και $G\subseteq B$

*Αντίστροφη εικόνα του G μέσω της f:

$f^{-1}(G)=\{x\in A: f(x)\in G\}$



- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

$f^{-1}([0,4])=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\in[0,4]\}=\{x\in\mathbb{R}, 0\le x^2\le 4\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}, x^2\le 4\}=[-2,2]$

$x^2\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\le\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$

$x\in[-2,2]$

- $f^{-1}([-1,-1/2])=\{x\in\mathbb{R}, -1, x^2\le -1/2\}=\emptyset$

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Ιδιότητες

$\Rightarrow |x| \leq a \quad (a>0)$

$-a \leq x \leq a$

$\Rightarrow |x| \geq a \quad (a>0)$

$x \geq a$ ή $x \leq -a$

$\Rightarrow |xy| = |x| \cdot |y|$

$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

$\Rightarrow |x| < \varepsilon, \ \forall \ \varepsilon > 0$

Απόδειξη

Έστω ότι $x \neq 0$, τότε $|x| > 0$

Παίρνω $\varepsilon = |x| \rightarrow |x| < |x|$ Άτοπο

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|, \ \forall \ x,y \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

$(\sqrt{x^2+y^2})^2 \leq (|x|+|y|)^2 \iff$

$x^2+y^2 \leq x^2+y^2+2|x||y|$

$2|x||y| \geq 0$ Ισχύει

$\Rightarrow \sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$

Απόδειξη

$(\sqrt{|x|+|y|})^2 \leq (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$

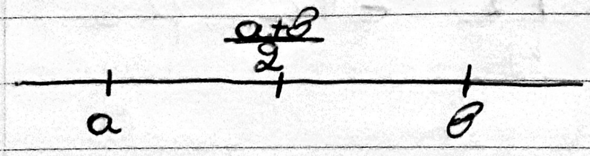
$|x|+|y| \leq |x| + |y| + 2\sqrt{|x||y|}$

$2\sqrt{|x||y|} \geq 0$ Ισχύει

$a \leq x \leq \beta \quad | \ a < \beta$

Άσκηση: Να γραφεί η ανισότητα στην μορφή

$|x-k| \leq \lambda \rightarrow |x -$ μέσο του διαστήματος$| \leq \frac{\text{μήκος}}{2}$



$|x - \frac{a+\beta}{2}| \leq \frac{\beta - a}{2} \iff \frac{-(\beta-a)}{2} \leq x - \frac{a+\beta}{2} \leq \frac{\beta-a}{2} \iff$

$a \leq x \leq \beta$

Ειδικές κατηγορίες αναρτήσεων

1) $f: A \to A$, $f(x) = x$, $\forall x \in A$

Η f λέγεται ταυτοτική (id_A, Id_A, I_A συμβολισμοί)

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f άρτια αν $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- f περιττή αν $-f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

π.χ. $f(x) = x$ περιττή

$f(x) = x^2$ άρτια

3) $f: A \to \mathbb{R}$ $| A \subseteq \mathbb{R}$

Η f λέγεται φραγμένη, αν $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$

π.χ. (α) $f(x) = x$ όχι φραγμένη στο $\mathbb{R}$

(β) $f(x) = ημx \Rightarrow |f(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

άρα φραγμένη στο $\mathbb{R}$

4) $f: A \to \mathbb{R}$ $| A \subseteq \mathbb{R}$

τέτοια ώστε $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) \leq f(x_2)$ (αντ. $f(x_1) \geq f(x_2)$), τότε η f λέγεται αύξουσα (αντ. φθίνουσα). Αν οι ανισότητες είναι γνήσιες, η f λέγεται γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα)

<u>Παράδειγμα:</u> $f_a: \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} \to \mathbb{R}$, $a > 0$, με τύπο $f_a(p) = a^p$, τότε f_a, τότε f_a είναι γνησίως αύξουσα για $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα για $0 < a < 1$

Έστω $a > 1$, $p_1 = \frac{\mu_1}{\nu_1}$, $p_2 = \frac{\mu_2}{\nu_2} \in \mathbb{Q}_+$ με

$p_1 < p_2 \iff \mu_1 \nu_2 < \mu_2 \nu_1$ *

$$\frac{f_a(p_1)}{f_a(p_2)} = \frac{a^{\frac{\mu_1}{\nu_1}}}{a^{\frac{\mu_2}{\nu_2}}} = a^{\frac{\mu_1}{\nu_1} - \frac{\mu_2}{\nu_2}} = a^{\overset{<0}{\frac{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1}{\nu_1 \nu_2}}} < 1$$

$\Rightarrow f_a(p_1) < f_a(p_2)$ Άρα f_a γνησίως αύξουσα και ομοίως f_a γνησίως φθίνουσα για $0<a<1$.

5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
f πολυωνυμική.

6) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow f$ ρητή όταν P, Q πολυώνυμα

7) Ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$: $[x]$
Ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι $\leq x$
πχ $[1.31] = 1$, $[-2.57] = -3$

8) Αν $f, g: A \to \mathbb{R}$ | $A \subseteq \mathbb{R}$
- $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $x \in A$
  ↳ ελάχιστο
- $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in A$
  ↳ μέγιστο
- $f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$ → Θετικό μέρος της f
- $f^-(x) = (f \wedge 0)(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}$

$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$

9) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο $a \in \mathbb{R}$ αν $f(x+a) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Παραδείγματα:</u> $f(x) = \eta\mu x$, περίοδος είναι 2π
τόξο ημy: $[-1, 1] \to [2k\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
$(\eta\mu x)^{-1}$

κύριος κλάδος $[-\pi/2, \pi/2]$

$f(x) = συνx$, περίοδος $2π$.

τόξο $συνy : [-1,1] \to [0,π]$

$\downarrow$

$(συνx \mid [0,π])^{-1}$

$f(x) = εφx$

τόξο $εφy : \mathbb{R} \to \left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$

$f(x) = σφx$

τόξο $σφy : \mathbb{R} \to (0,π)$